26/11/15

Παράδειγμα: Οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$:
- Το $\mathbb{R}^3$
- Επίπεδα που περνούν από την αρχή των αξόνων
- Ευθείες που περνούν από την αρχή των αξόνων
- $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Ορισμός: Έστω V διανυσματικός χώρος και W_1, W_2 υπόχωροι του V. Ορίζουμε $W_1+W_2=\{w_1+w_2 : w_1\in W_1, w_2\in W_2\}$

Πρόταση: α) $W_1\subseteq W_1+W_2$, $W_2\subseteq W_1+W_2$
b) W_1+W_2 υπόχωρος του V
c) Το W_1+W_2 είναι ο ελάχιστος υπόχωρος του V που περιέχει και το W_1 και το W_2.

Απόδειξη
α) Έστω $z_1\in W_1$. Αφού W_2 υπόχωρος του V, $0_V\in W_2$.
Άρα $z_1=z_1+0_V\in W_1+W_2$
Ομοίως δείχνουμε $W_2\subseteq W_1+W_2$
b) 1) Έχουμε $0_V=0_V+0_V$. Αφού W_1, W_2 υπόχωροι, $0_V\in W_1$ και $0_V\in W_2$. Από σχέση (1) $\rightarrow 0_V\in W_2+W_1$
2) Έστω $z_1, z_2\in W_1+W_2$. Θ.δ.ο. $z_1+z_2\in W_1+W_2$. Αφού $z_1\in W_1+W_2$ υπάρχουν $w_1\in W_1$, $w_2\in W_2$: $z_1=w_1+w_2$
Αφού $z_2\in W_1+W_2$, υπάρχουν $w_3\in W_1$ $w_4\in W_2$: $z_2=w_3+w_4$
Έχουμε $z_1+z_2=(w_1+w_2)+(w_3+w_4)=(w_1+w_3)+(w_2+w_4)$ (2).
Αφού $w_1, w_3\in W_1$ και W_1 υπόχωρος $\Rightarrow$
$w_1+w_3\in W_1$. Ομοίως $w_2+w_4\in W_2$. Επομένως η (2) δίνει $z_1+z_2\in W_1+W_2$.

3) Έστω $\lambda \in F$ και $z \in W_1+W_2$. Θ.δ.ο. $\lambda z \in W_1+W_2$
Αφού $z \in W_1+W_2$ υπάρχει $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$ με $z = w_1+w_2$. Τότε $\lambda z = \lambda(w_1+w_2) = (\lambda w_1)+(\lambda w_2)$ (3)
Αφού W_1 υπόχωρος, $\lambda \in F$, $w_1 \in W_1$, έπεται $\lambda w_1 \in W_1$. Ομοίως $\lambda w_2 \in W_2$. Από (3) έπεται ότι $\lambda z \in W_1+W_2$.

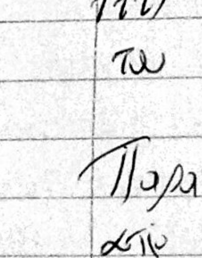
γ) Έστω Z υπόχωρος του V με $W_1 \cup W_2 \subseteq U$. Θ.δ.ο. $W_1+W_2 \subseteq U$. Πράγματι έστω $w_1+w_2 \in W_1+W_2$ με $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$. Αφού $W_1 \subseteq U \Rightarrow w_1 \in U$. Αφού $W_2 \subseteq U \Rightarrow w_2 \in U$. Αφού U υπόχωρος του V και $w_1 \in U$, $w_2 \in U \Rightarrow w_1+w_2 \in U$.
Άρα $W_1+W_2 \subseteq U$

Ορισμός:
Έστω $W_1, W_2, \ldots, W_n$ υπόχωροι του V. Ορίζουμε $W_1+W_2+\ldots+W_n = \{w_1+w_2+\ldots+w_n, w_i \in W_i$ για κάθε $i=1,2,\ldots n\}$

Άσκηση: Δείξτε ότι αν $W_1, W_2, \ldots W_n$ υπόχωροι του V, τότε
i) $W_i \subseteq W_1+\ldots+W_n$ για κάθε $i=1,2,\ldots,n$
ii) $W_1+\ldots+W_n$ υπόχωρος του V.
iii) $W_1+\ldots+W_n$ είναι ο ελάχιστος υπόχωρος του V που περιέχει τα W_i, για κάθε $i=1,2,\ldots,n$

Παρατήρηση: W_1, W_2 ευθείες στο $\mathbb{R}^2$ που περνούν από την αρχή των αξόνων.
Δύο περιπτώσεις: i) $W_1 = W_2$. Τότε (άσκηση) $W_1+W_2 = W_1 = W_2$
ii) $W_1 \neq W_2$ Τότε $W_1+W_2 = \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$



ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω V διανυσματικός χώρος/$\mathbb{F}$ και W_1, W_2 διανυσματικοί υπόχωροι του V. Λέμε ότι το άθροισμα W_1+W_2 είναι ευθύ (και γράφουμε $W_1+W_2 = W_1 \oplus W_2$) αν $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$

Ορισμός: Έστω V διανυσματικός χώρος/$\mathbb{F}$ και W_1, W_2 υπόχωροι του V. Λέμε ότι το V είναι το **ΕΥΘΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑ** των W_1, W_2 αν:

i) $V = W_1 + W_2$

ii) Το άθροισμα W_1+W_2 είναι ευθύ.

π.χ. Αν $V=\mathbb{R}^2$ και W_1, W_2 ευθείες που περνούν από την αρχή των αξόνων και $W_1 \neq W_2$ τότε $V = W_1 \oplus W_2$ από την προηγούμενη παρατήρηση.

Παράδειγμα: Έστω $V=\mathbb{R}^3$ και W_1, W_2 ευθείες στο $\mathbb{R}^3$ που περνούν από την αρχή των αξόνων. Τότε το άθροισμα W_1+W_2 είναι ευθύ, γιατί W_1, W_2 ευθείες, γιατί $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$. Αλλά W_1+W_2 είναι το επίπεδο που περιέχουν οι W_1, W_2 άρα $V \neq W_1+W_2$.

Παράδειγμα: Έστω $V=\mathbb{R}^3$ και W_1, W_2 επίπεδα του $\mathbb{R}^3$ που περνούν από την αρχή των αξόνων. Τότε το άθροισμα W_1+W_2 δεν είναι ευθύ, γιατί $W_1 \cap W_2 =$ ευθεία

Παράδειγμα: Έστω $V=\mathbb{R}^3$, W_1 επίπεδο που περνά από την αρχή των αξόνων και W_2 ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων και δεν περιέχεται στο W_1. Τότε ισχύει: i) $V = W_1+W_2$

ii) Το άθροισμα W_1+W_2 είναι ευθύ.

Πρόταση: Έστω V διαν. χώρος επί του σώματος F και W_1, W_2 δύο υπόχωροι του V. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

i) $V = W_1 \oplus W_2$ (δηλ. ο V είναι το ευθύ άθροισμα των W_1 και W_2)

ii) Αν $v \in V$ υπάρχουν <u>μοναδικά</u> $z_1 \in W_1, z_2 \in W_2$ με $v = z_1 + z_2$

Απόδειξη

i) => ii) Έστω $V = W_1 \oplus W_2$. Αφού $V = W_1 \oplus W_2$ έχουμε $V = W_1 + W_2$ (1). Έστω $v \in V$. Από (1) υπάρχουν $z_1 \in W_1$, $z_2 \in W_2$ με $v = z_1 + z_2$.

Έστω $z_1, z_1' \in W_1$, $z_2, z_2' \in W_2$ με $v = z_1 + z_2 = z_1' + z_2'$ (2).

Θ.δ.ο. $z_1 = z_1'$ και $z_2 = z_2'$. Πράγματι (2) => $z_1 + z_2 = z_1' + z_2'$ => $z_1 - z_1' = z_2' - z_2$ (3). Αφού W_1 υπόχωρος και $z_1, z_1' \in W_1$ => $z_1 - z_1' \in W_1$ (4) (γιατί $-z_1' = (-1)z_1' \in W_1$. Ομοίως $z_2' - z_2 \in W_2$ (5). Από (4), (5), η (3) δίνει $z_1 - z_1' = z_2' - z_2 \in W_1 \cap W_2$ (6). Αλλά από υπόθεση $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$. Άρα η (6) δίνει $0 = z_1 - z_1'$ => $z_1 = z_1'$ και $0 = z_2' - z_2$ => $z_2 = z_2'$

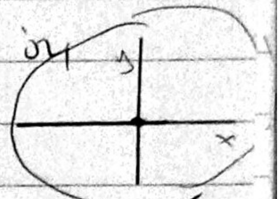
ii) => i) Έστω $v \in V$. Αφού υπάρχουν $z_1 \in W_1$ και $z_2 \in W_2$ με $v = z_1 + z_2$ έχουμε $v \in W_1 + W_2$. Άρα $V \subseteq W_1 + W_2$ και αφού πάντα $W_1 + W_2 \subseteq V$ έπεται $V = W_1 \oplus W_2$

Τώρα Θ.δ.ο. $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$. Έστω $v \in W_1 \cap W_2$. Τότε $v = v + 0_V$ (7) (γράφουμε με $v \in W_1$, $0_V \in W_2$) και $v = 0_V + v$ (8) (γραφή ~~...~~ με $0_V \in W_1$, $v \in W_2$)

Η υπόθεσή μας για μοναδικότητα γραφής δίνει, από τις (7) και (8) $v = 0_V$ => $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$

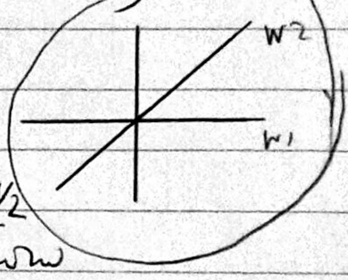
Παράδειγμα: Έστω $V=\mathbb{R}^2$, $W_1=\{(x,0): x\in\mathbb{R}\}=\langle(1,0)\rangle$ και
$W_2=\{(0,y): y\in\mathbb{R}\}=\langle(0,1)\rangle$

Τότε $W_1\oplus W_2=V$. Πράγματι θα δ.ο. $V=W_1+W_2$ και το άθροισμα W_1+W_2 είναι ευθύ. Έστω $v\in V=\mathbb{R}^2$. Τότε υπάρχουν $\alpha,b\in\mathbb{R}$ με $v=(\alpha,b)$. Τότε $v=(\alpha,0)+(0,b)\in W_1+W_2$, γιατί $(\alpha,0)\in W_1$ και $(0,b)\in W_2$.
Άρα δείξαμε $V=W_1+W_2$. Τώρα θα δείξουμε ότι $W_1\cap W_2=\{0_V\}$, δηλαδή $W_1\cap W_2=\{(0,0)\}$



Πράγματι, αν $v=(\alpha,b)\in W_1\cap W_2$ αφού $v\in W_1 \Rightarrow b=0$ και αφού $v\in W_2 \Rightarrow \alpha=0$. Άρα $W_1\cap W_2=\{(0,0)\}=\{0_V\}$

* Αν $W_2=\{(y,y): y\in\mathbb{R}\}=\langle(1,1)\rangle$ τότε



Τότε $V=W_1\oplus W_2$. Πράγματι θ.δ.ο. $V=W_1+W_2$ και το άθροισμα W_1+W_2 είναι ευθύ. Έστω $v\in V=\mathbb{R}^2$, τότε υπάρχουν $\alpha,b\in\mathbb{R}$ με $v=(\alpha,b)$. Τότε υποθέτουμε
$v=\lambda(1,0)+\mu(1,1) \Rightarrow (\alpha,b)=(\lambda+\mu,\mu) \Rightarrow \mu=b$
$\lambda=\alpha-\mu=\alpha-b$

$v=(\alpha,b)=(\alpha-b+b,b)=(\alpha-b,0)+(b,b)\in W_1+W_2$. Όπως προηγουμένως δείχνουμε $W_1\cap W_2=\{(0,0)\}$. Άρα $\mathbb{R}^2=W_1\oplus W_2$

ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

Ορισμός: Έστω V δ.χ./F και $w_1,w_2,\dots,w_n\in V$. Το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών των $w_1,w_2,\dots$ είναι το εξής (λέγεται και γραμμική θήκη των $w_1\dots w_n$)
$\langle w_1,w_2,\dots,w_n\rangle=\{\lambda_1w_1+\lambda_2w_2+\dots+\lambda_nw_n:\lambda_i\in F\}$

π.χ. $n=2$
$\langle w_1,w_2\rangle=\{\lambda_1w_1+\lambda_2w_2:\lambda_i\in F\}$

Το $\langle w_1 \dots w_n \rangle$ λέγεται υπόχωρος του V που παράγεται από τα $w_1 \dots w_n$.

Ένα στοιχείο $v \in V$ λέγεται γραμμικός συνδυασμός των $w_1 \dots w_n$ αν και μόνο αν $v \in \langle w_1 \dots w_n \rangle$ δηλαδή αν και μόνο αν υπάρχουν $\lambda_1 \dots \lambda_n \in F$ με $v = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n$